I KONKURS MATEMATYCZNY DLA GIMNAZJALISTÓW

IV KONKURS MATEMATYCZNY DLA UCZNIÓW SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH

Zadania finałowe
Czas rozwiązania 60 minut

POWODZENIA !

1. Wykaż, że jeżeli a i b są liczbami nieujemnymi, to $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$.

2. Łącząc środki kolejnych boków pięciokąta wypukłego otrzymamy łamaną o długości 1004 cm . Oblicz sumę długości wszystkich przekątnych tego pięciokąta.

3. Obok miejscowości A i B odległych od siebie o 10 km wybudowano linię kolejową. Odległości miejscowości A i B od wybudowanej linii kolejowej wynoszą odpowiednio 2 km i 10 km.

a) Opisz w jaki sposób można konstrukcyjnie wyznaczyć miejsce na wybudowanie stacji kolejowej, tak aby mieszkańcy miejscowości A i B mieli jednakowo daleko do niej.

b) Oblicz ile będzie wynosiła odległość od A lub B do wybudowanej stacji kolejowej?

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 1.

Ponieważ obie strony nierówności są nieujemne, więc podnosząc obustronnie do kwadratu nierówność $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$ otrzymujemy:

$$a+2\sqrt{ab}+b \le 2a+2b$$

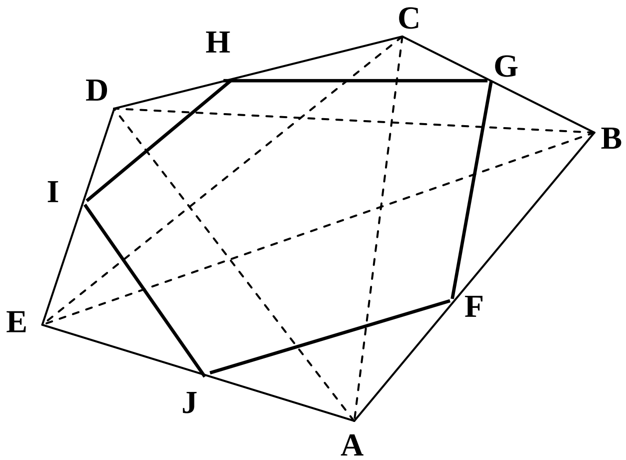
$$a-2\sqrt{ab}+b \ge 0$$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0.$$

Ponieważ ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb nieujemnych a i b, więc wyjściowa nierówność jest także prawdziwa.

Zadanie 2.

Z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków trójkąta wynika, że:



$$|HG| = \frac{1}{2}|BD|$$

$$|GF| = \frac{1}{2}|CA|$$

$$|FJ| = \frac{1}{2}|BE|$$

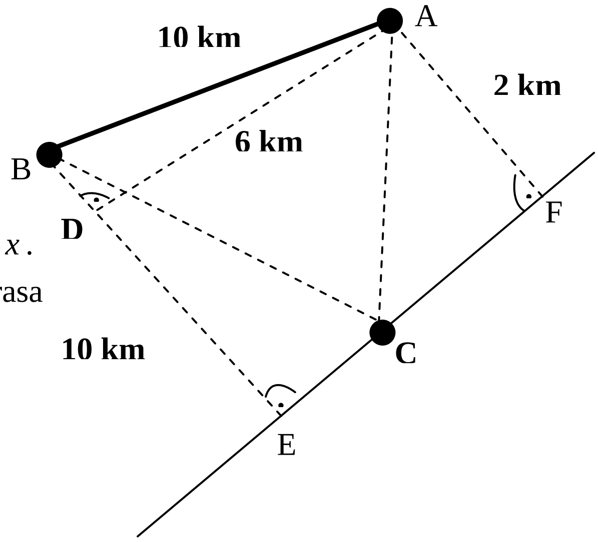
$$|IJ| = \frac{1}{2}|AD|$$

$$|IH| = \frac{1}{2}|EC|$$

Po dodaniu stronami wszystkich równań otrzymujemy:

$|HG|+|GF|+|FJ|+|IJ|+|IH| = \frac{1}{2}\left(|BD|+|CA|+|BE|+|AD|+|EC|\right)$. Lewa strona tej równości jest równa 1004 cm, natomiast prawa strona jest równa połowie sumy długości wszystkich przekątnych tego pięciokąta. Więc suma długości wszystkich przekątnych wynosi 2008 cm.

Zadanie 3.



$|BD| = 10 - 2 = 8$

Stosując twierdzenie Pitagorasa do ΔABD

otrzymujemy $|AD| = 6$.

Oznaczmy szukaną odległość $|AC| = |BC| = x$.

Zastosujmy dwukrotnie twierdzenie Pitagorasa do ΔACF oraz ΔBCE.

$$\begin{cases} x^2 = (6 - |EC|)^2 + 10^2 \\ x^2 = |EC|^2 + 2^2 \end{cases}.$$

Porównując oba równania otrzymujemy:

$$(6 - |EC|)^2 + 10^2 = |EC|^2 + 2^2$$

$$36 - 12|EC| + |EC|^2 + 100 = |EC|^2 + 4$$

$|EC| = 11 km$. Podstawiając obliczoną długość odcinka $|EC|$ do jednego z równań układu otrzymujemy

$x^2 = 125$,

$x = 5\sqrt{5}$ *km.*

$x \approx 11{,}3$ *km.*

Geometryczne wyznaczenie punktu C polega na wykreśleniu symetralnej odcinka *AB*. Punkt przecięcia tej symetralnej z prostą *EF* jest szukanym punktem (symetralna odcinka jest zbiorem punktów równoodległych od jego końców), w którym należy wybudować stację kolejową.