I KONKURS MATEMATYCZNY DLA GIMNAZJALISTÓW

IV KONKURS MATEMATYCZNY DLA UCZNIÓW SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH

Zadania I etapu
Czas rozwiązania 90 minut

POWODZENIA !

1. Oblicz pole pierścienia wyznaczonego przez okrąg wpisany i okrąg opisany na trójkącie równobocznym o boku 2 cm. (5p)

2. Liczba naturalna dwucyfrowa jest równa potrojonemu iloczynowi jej cyfr. Znajdź tę liczbę. (7p)

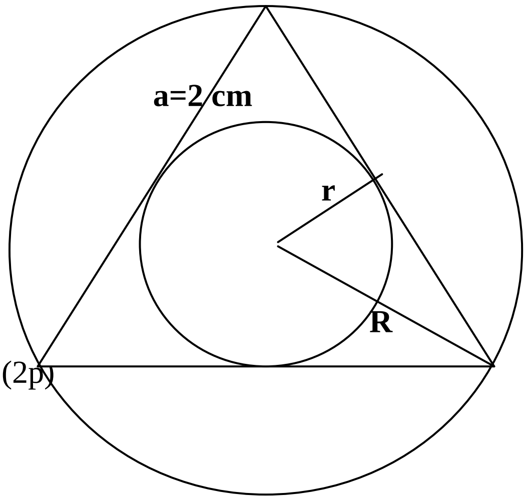
3. Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{8}{y} = 3 \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{10}{y} = 2\dfrac{2}{3} \end{cases}$. (6p)

4. Trzy kolejne boki pewnego czworokąta wypukłego mają długości 1 cm, 2 cm i 3 cm. Wyznacz długość czwartego boku tego czworokąta wiedząc, że jego przekątne są wzajemnie prostopadłe. (6p)

5. Do naczynia w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 4cm, 4 cm, 10 cm napełnionego napojem do 75% jego wysokości wrzucamy kawałki lodu w kształcie kuli o promieniu 1 cm. Ile maksymalnie kostek można wrzucić do tego naczynia, tak aby nie spowodować wylania napoju z naczynia? (6p)

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 1.



$r=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $R=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (1p)

$P=\pi R^2-\pi r^2=\pi\left(R^2-r^2\right)=$ (1p)

$=\pi\left[\left(\frac{1}{3}a\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{1}{6}a\sqrt{3}\right)^2\right]=$

$=\pi\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{12}a^2\right)=\frac{3}{12}\cdot\pi a^2=\frac{1}{4}\pi a^2.$ (2p)

Podstawiając $a=2\ cm$ otrzymujemy $P=\pi\ cm^2$. (1p)

Zadanie 2.

Oznaczmy:

x – cyfra dziesiątek $x\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

y - cyfra jedności $y\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (1p)

10x+y – dana liczba dwucyfrowa (1p)

Z warunków zadania wynika, że

$10x+y=3xy$. (1p)

Po przekształceniach otrzymujemy: $x(3y-10)=y$. (1p)

Aby to równanie miało rozwiązanie to $3y-10>0\ \ i\ \ 3y-10<10$.

Stąd otrzymujemy $y\in\{4,5,6\}$. (1p)

Sprawdzając wyjściową równość dla otrzymanych

y otrzymujemy $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$, $\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}$. (1p)

Odpowiedź: Szukane liczby to 24 i 15. (1p)

Zadanie 3.

Podstawmy: $\frac{1}{y} = t$. (1p)

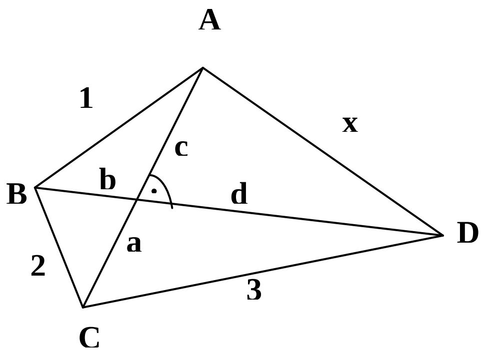
Otrzymujemy następujący układ: $\begin{cases} \frac{x}{3} + 5t = 4\frac{1}{3} \\ \frac{x}{6} + 10t = 2\frac{2}{3} \end{cases}$,

a następnie $\begin{cases} x + 15t = 13 \\ -x - 60t = -16 \end{cases}$. (2p)

Rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 12 \\ t = \frac{1}{15} \end{cases}$. (2p)

Wracając do pierwotnej zmiennej *y* otrzymujemy rozwiązanie $\begin{cases} x = 12 \\ y = 15 \end{cases}$. (1p)

Zadnie 4.



(1p)

(sporządzenie rysunku wraz z oznaczeniami)

Zastosujmy trzykrotnie twierdzenie Pitagorasa:

$a^2 + b^2 = 4$

$a^2 + d^2 = 9$ (2p)

$b^2 + c^2 = 1$

Dodajemy stronami drugie i trzecie równanie otrzymując:
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$. (1p)
Wykorzystując w powyższej równości pierwsze równanie otrzymujemy:
$c^2 + d^2 = 6$. (1p)
Stąd wynika, że $x = \sqrt{6}$. (1p)

Zadanie 5.

Oznaczmy:
V_1 – objętość prostopadłościanu
V_2 – objętość cieczy wlanej do prostopadłościanu
V_3 - objętość wrzuconych kostek lodu

$V_1 = 4 \cdot 4 \cdot 10 = 160\ cm^2$ (1p)

$V_2 = \frac{3}{4} \cdot 160\ cm^2 = 120\ cm^2$ (1p)

$V_2 - V_1 = 40\ cm^2$ (1p)

Aby obliczyć ilość kulek (ozn. n), które można wrzucić do naczynia należy rozwiązać nierówność: $40 \geq n \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3$. (1p)

Przyjmując $\pi \approx 3{,}14$ otrzymujemy $n \leq 9{,}55$. (1p)

Odp: Do naczynia można wrzucić maksymalnie 9 kostek lodu w kształcie kuli o promieniu 1 cm. (1p)