III KONKURS MATEMATYCZNY DLA UCZNIÓW SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH

Zadania I etapu
Czas rozwiązania 120 minut

POWODZENIA !

1. Jaka musi być długość a danego odcinka, aby z odcinków

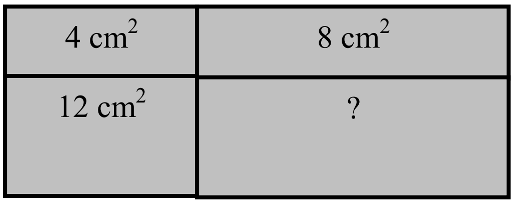
   o długościach: $a + 3$, $2a + 5$, $4a + 1$

   a) można było zbudować trójkąt,

   b) można było zbudować trójkąt równoramienny

   c) można było zbudować trójkąt równoboczny? (6p)

2. Prostokąt pocięto na cztery prostokąty, z których trzy mają pola 4 cm2, 8 cm2 i 12 cm2. Jakie pole ma duży prostokąt? (6p)



3. Wykazać, że liczba $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{100}$ jest podzielna przez 3. (5p)

4. Za dwa długopisy i cztery ołówki zapłacono 11zł 20gr. Za dwa ołówki i pięć flamastrów zapłacono 6 zł 40 gr. Za cztery długopisy i jeden flamaster zapłacono 13 zł 60 gr. Ile będzie kosztować pięć długopisów, pięć ołówków i pięć flamastrów? (5p)

5. Sprawdź, czy $x = y \cdot z$, jeżeli:

   $x = 3333 \cdot 4444 - 1111 \cdot 2222$

   $y = 2222 \cdot 4444 - 1111 \cdot 3333$

   $z = 2222 \cdot 3333 - 1111 \cdot 4444$

   (5p)

KONKURS MATEMATYCZNY DLA GIMNAZJALISTÓW

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 1.

a) Aby z danych trzech odcinków można było zbudować trójkąt musi być spełniona nierówność trójkąta i długość każdego odcinków musi być liczbą dodatnią, tzn. $a+3>0$ i $2a+5>0$ i $4a+1>0$ i $a+3+2a+5>4a+1$ i $a+3+4a+1>2a+5$ i $2a+5+4a+1> a+3$.

Po rozwiązaniu tego układu otrzymujemy: $a \in \left(\frac{1}{3};7\right)$.

b) Aby z danych odcinków można było zbudować trójkąt równoramienny jedno z trzech równań musi mieć rozwiązanie spełniające warunek $a \in \left(\frac{1}{3};7\right)$, tzn.

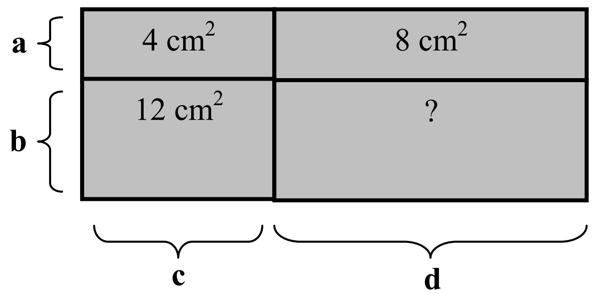
$a+3=2a+5$ lub $a+3=4a+1$ lub $2a+5=4a+1$

$a=-2$ lub $a=\frac{2}{3}$ lub $a=2$.

Rozwiązanie $a=-2$ odrzucamy.

c) Aby z danych odcinków można było zbudować trójkąt równoboczny powinien być spełniony układ równań: $a+3=2a+5$ i $a+3=4a+1$ i $2a+5=4a+1$. Układ ten jest oczywiście sprzeczny.

Zadanie 2.



(1) $a \cdot c = 4$
(2) $b \cdot c = 12$
(3) $a \cdot d = 8$
(4) $b \cdot d = ?$

Dzielimy stronami (2) i (1) oraz (3) i (1) otrzymując: $b = 3 \cdot a$ i $d = 2 \cdot c$.

$b \cdot d = 3 \cdot a \cdot 2 \cdot c = 6 \cdot a \cdot c = 6 \cdot 4 = 24$.

Pole czwartego prostokąta jest r ówne 24 cm2. Stąd wynika, że pole dużego prostokąta, jako suma pól wszystkich prostokątów wynosi 24+12+8+4=48cm2.

Zadanie 3.

Zauważmy, że:

$$2+2^2+2^3+...+2^{100}=\left(2+2^2\right)+\left(2^3+2^4\right)+...+\left(2^{99}+2^{100}\right)=2\cdot(1+2)+2^3\cdot(1+2)+...+2^{99}\cdot(1+2)=$$

$$2\cdot 3+2^3\cdot 3+...+2^{99}\cdot 3=3\cdot\left(2+2^3+...+2^{99}\right)$$

Stąd wynika, że liczba $2+2^2+2^3+...+2^{100}$ jest podzielna przez 3.

Zadanie 4.

Oznaczmy: d - ilość kupionych długopisów
o - ilość kupionych ołówków
f - ilość kupionych flamastrów

Z treści zadania wynika, że: $\begin{cases} 2d+4o=11{,}2 \\ 2o+5f=6{,}4 \\ 4d+f=13{,}6 \end{cases}$.

Dodając stronami ten układ otrzymujemy: $6d+6o+6f=31{,}2$.

Mnożąc obie strony otrzymanego równania przez $\frac{5}{6}$ otrzymujemy: $5d+5o+5f=26$.

Odpowiedź: Za pięć długopisów, pięć ołówków i pięć flamastrów zapłacimy 26 zł.

Zadanie 5.

$x=3\cdot 1111\cdot 4\cdot 1111-1111\cdot 2\cdot 1111=12\cdot 1111^2-2\cdot 1111^2=10\cdot 1111^2$

$y=2\cdot 1111\cdot 4\cdot 1111-1111\cdot 3\cdot 1111=8\cdot 1111^2-3\cdot 1111^2=5\cdot 1111^2$

$z=2\cdot 1111\cdot 3\cdot 1111-1111\cdot 4\cdot 1111=6\cdot 1111^2-4\cdot 1111^2=2\cdot 1111^2$

$y\cdot z=5\cdot 1111^2\cdot 2\cdot 1111^2=10\cdot 1111^4$, natomiast $x=10\cdot 1111^2$.

Stąd wynika, że $x\neq y\cdot z$.